Soluzione
Esame di Elementi di Logica e Strutture Discrete

Corso di Laurea in Informatica

Prova parziale del 29·10·2024 – primo turno

Esercizio 1. Dimostriamo che la relazione R su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow x \bmod 10 = y \bmod 10$$

è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione.

R **è riflessiva. (2 punti)** $\forall x \in \mathbb{N} : R(x, x) \Leftrightarrow x \bmod 10 = x \bmod 10$ è vero, perché il resto della divisione per 10 di un generico numero x è unico (in altre parole, $(\cdot \bmod 10)$ è una funzione).

R **è simmetrica. (2 punti)** $\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow x \bmod 10 = y \bmod 10 \Leftrightarrow y \bmod 10 = x \bmod 10 \Leftrightarrow R(y, x)$, dove si è usata la proprietà simmetrica della relazione di uguaglianza (anch'essa di equivalenza).

R **è transitiva. (2 punti)** Sia $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : R(x, y) \wedge R(y, z)$. Allora, per definizione di R:

$$\begin{cases} x \bmod 10 = y \bmod 10 \\ y \bmod 10 = z \bmod 10 \end{cases}$$

da cui si ottiene $x \bmod 10 = z \bmod 10$, che è la definizione di $R(x, z)$ e prova la proprietà transitiva. □

Siccome $R(x, y)$ vale se e solo se x ha lo stesso resto di y nella divisione per 10, il numero di possibili resti ottenibili dividendo per 10 è anche il numero di classi di equivalenza della relazione R. Osserviamo che ($x \bmod 10$) dà sempre come risultato l'ultima cifra decimale di x (l'unità), ovvero può assumere solo valori da 0 a 9. Quindi, R partiziona $\mathbb{N}$ in 10 classi di equivalenza. **(2 punti)**

Esercizio 2. Sia $D = \{3, 13, 15, 27, 52, 60\}$, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D : R(x, y) \Leftrightarrow x|y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$$

Dimostriamo che R su D è una relazione d'ordine.

Dimostrazione.

R **è riflessiva. (1 punto)** $\forall x \in D : R(x, x) \Leftrightarrow x|x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = mx$ è vero, perché esiste tale intero ed è $m = 1$.

R è anti-simmetrica. (4 punti) Sia $\forall x, y \in D : R(x,y) \land R(y,x)$. Allora, per definizione di R, esistono $m, q \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$\begin{cases} y = mx \\ x = qy \end{cases}$$

da cui: $y = m(qy)$, che per la proprietà associativa della moltiplicazione diventa $y = (mq)y$. Poiché l'equazione sia verificata, dev'essere $mq = 1$, e inoltre $m, q \in \mathbb{Z}$. Si hanno due possibilità:

$$m = q = -1 \tag{1}$$

$$\lor$$

$$m = q = 1 \tag{2}$$

Nel caso (1), si otterrebbe $y = -x$ oppure $x = -y$, dalla definizione di R. Ma questa situazione non è possibile, dato che $x, y \in D$ e dunque $x > 0 \land y > 0$. Quindi, resta il caso (2), che porta a $x = y$.

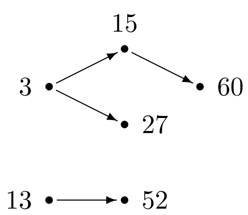
R è transitiva. (3 punti) Sia $\forall x, y, z \in D : R(x,y) \land R(y,z)$. Allora, per definizione di R, esistono $m, q \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$\begin{cases} y = mx \\ z = qy \end{cases}$$

da cui si ottiene $z = q(mx)$. Per la proprietà associativa della moltiplicazione, diventa $z = (qm)x$. Siccome $q, m \in \mathbb{Z}$, allora anche $mq \in \mathbb{Z}$, perché il prodotto di interi è ancora un intero. Chiamando j tale intero ($j = mq$), si ottiene: $z = jx$, che è proprio la definizione di $R(x,z)$.

$\square$

Disegniamo il diagramma di Hasse della relazione R su D.



Dal diagramma, è semplice notare che ci sono alcuni elementi non confrontabili. Ad esempio, il 3 e il 13: $3 \nmid 13 \land 13 \nmid 3$. Dunque R è di ordine parziale su D. **(1 punto)**

Osservando il grafico, si nota che la relazione ha due elementi minimali: 3 e 13. Inoltre, essa ha tre elementi massimali: 27, 52 e 60. **(1 punto)**

Esercizio 3. Si ha la seguente somma.

$$\sum_{i=1}^{n} (8i^3 + 2)$$

Per calcolarne il valore, è sufficiente applicare le somme notevoli (1) e (4) del formulario. **(3 punti)**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (8i^3 + 2) &= 8\sum_{i=1}^{n} i^3 + 2\sum_{i=1}^{n} 1 && \text{(Linearità della somma)} \\ &= 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 2n && \text{(Formule (1) e (4))} \\ &= 2n^2(n+1)^2 + 2n \end{aligned}$$

Ora, dimostriamo per induzione la proprietà

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} (8i^3 + 2) = 2n^2(n+1)^2 + 2n$$

Dimostrazione.

Caso base. (2 punti) Sia $n = 1$. Quindi, $P(1)$ diventa:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{1}(8i^3+2) &= 2\cdot 1^2(1+1)^2 + 2\cdot 1\\ 8\cdot 1^3 + 2 &= 2\cdot 1\cdot 4 + 2\\ 10 &= 10\end{aligned}$$

Perciò $P(1)$ è vera e caso base è verificato.

Passo induttivo. (4 punti) Dobbiamo dimostrare che vale $P(n+1)$, data $P(n)$. Scriviamo la proprietà $P(n+1)$.

$$P(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1}(8i^3+2) = 2(n+1)^2(n+2)^2 + 2(n+1)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(8i^3+2) &= \sum_{i=1}^{n}(8i^3+2) + 8(n+1)^3 + 2 && \text{(Definizione di sommatoria)}\\ &= 2n^2(n+1)^2 + 2n + 8(n+1)^3 + 2 && \text{(Ipotesi induttiva)}\\ &= 2n^2(n+1)^2 + 8(n+1)^3 + 2(n+1) && \text{(Raccolgo 2 nel II e IV addendo)}\\ &= 2(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) + 2(n+1) && \text{(Raccolgo } 2(n+1)^2 \text{ nel I e II addendo)}\\ &= 2(n+1)^2(n^2+4n+4) + 2(n+1)\\ &= 2(n+1)^2(n+2)^2 + 2(n+1) && \text{(Quadrato del binomio)}\end{aligned}$$

La catena di uguaglianze mi ha portato a dimostrare $P(n+1)$ a partire dall'ipotesi induttiva, quindi il passo induttivo è verificato. □